

## 7. Ferramentas Inteligentes para a Geometria

Pedro Quaresma

Por *Ferramentas Inteligente para a Geometria* entende-se ferramentas computacionais capazes de uma *inteligência algorítmica*. Não vou aqui tentar definir formalmente inteligência algorítmica, antes vou descrever as ferramentas computacionais inteligentes, ficando ao cargo do leitor a compreensão do que o conceito de *inteligência algorítmica* poderá abarcar no que concerne a Geometria.

Pretende-se apresentar de que forma a Máquina de Turing se entrecruzou com a Geometria e de que forma é que a Geometria e a utilização que fazemos dela mudou.

Julgo que a primeira área da geometria a ter sido, de forma significativa, tocada pelo advento dos computadores foi a da demonstração automática de teoremas. A área da inteligência artificial [20, 46, 47] viu na teoria axiomática da geometria um conjunto de axiomas e de regras de inferência simples e manejável [25]. A geometria mostrou-se um campo muito interessante para quem, explorando os campos da inteligência artificial, pretendia automatizar as demonstrações de teoremas. É assim que surgem os primeiros demonstradores automáticos de teoremas para a geometria (GATP, do Inglês “Geometry Automated Theorem Provers”).

As complexidades inerentes ao desenvolvimento automático das demonstrações, nomeadamente com a “explosão” dos diferentes casos a considerar à medida que se vai tentando desenvolver a demonstração, levou a que estas primeiras tentativas não tenham sido muito profícuas. Ver-se-á mais tarde como é que este ramo da história se desenvolveu.

Um outro campo da Geometria, a sua representação visual, teve que esperar um pouco mais. Teve que esperar pelo desenvolvimento das capacidades gráficas (anos 80 do século XX) nos sistemas computacionais.

É a partir das décadas de 1980/1990 que surgem os primeiros sistemas computacionais de geometria dinâmica (DGS, do Inglês “Dynamic Geometry Systems”). Não estamos perante programas de desenho que permitem o desenhar de figuras geométricas por colocação de pontos, retas e outros objetos geométricos mais complexos num dado plano (Cartesiano), mas sim de programas capazes de lidar com as figuras geométricas de uma forma construtiva. Uma dada figura geométrica deixa de ser desenhada para passar a ser construída de acordo com um conjunto de regras geométricas bem definidas [54]. Este tipo de programas tem tido uma evolução contínua e são já ferramentas maduras de larga utilização em diferentes ambientes.

O retomar das aproximações à demonstração automática de teoremas na geometria deu-se a partir dos fins dos anos 1970 e depois nos anos 1980 com o desenvolvimento de métodos algébricos tais como o

método do conjunto característico de Wu-Ritt [7, 58] e os métodos baseados nas bases de Gröbner [3,4]. Estes métodos revelaram-se muito poderosos sendo capazes de demonstrar automaticamente centenas de teoremas geométricos complexos. Estes métodos recorrem à representação algébrica das construções geométricas, desenvolvendo as demonstrações por métodos puramente algébricos (resolução de sistemas de equações).

Mais recentemente, década de 90 do século XX, foram desenvolvidos métodos semialgébricos, por exemplo o método da área [27], em que uma dada teoria axiomática específica foi desenvolvida e em que os métodos de demonstração geométrica, com algumas manipulações algébricas elementares auxiliares, tornam possível a demonstração de centenas de teoremas geométricos e em que a demonstração formal é passível de ser seguida por um matemático.

Atualmente estas duas áreas das ferramentas inteligentes para a geometria começam a juntar-se em ferramentas computacionais que permitem, baseando-se na geometria construtiva, a representação visual dinâmica e a ligação à demonstração automática para a validação da própria construção e/ou a tentativa de demonstração de uma dada conjectura sobre a construção.

Uma outra aproximação também recente, tornada possível pelo desenvolvimento de ferramentas computacionais interativas de demonstração (ITP, do Inglês “Interactive Theorem Proving”) tais como o *Coq* e o *Isabelle* [39, 53] é o da formalização de fragmentos da geometria [32, 35, 37]. De certa forma esta aproximação dá-nos o fechar de um ciclo, desde a máquina formal da computação, a máquina de Turing, até ao uso dessa máquina para formalizar áreas da matemática.

Vejamos agora em mais detalhe cada uma destas áreas.

## 1. Métodos da Inteligência Artificial na Geometria

Ao tentarem automatizar os métodos tradicionais de demonstração, muitos dos métodos da área da inteligência artificial introduzem pontos auxiliares de forma a que determinados postulados se possam aplicar à demonstração. Estas aproximações levam a uma explosão combinatória no espaço de procura. O desafio é então o de, utilizando heurísticas, minimizar o número de passos necessários, evitando,

desse modo, a explosão combinatória no espaço das soluções possíveis. Exemplos de métodos deste tipo incluem aproximações por Gelernter [21], Nevins [38], Elcock [18], Greeno et al. [23], Coelho e Pereira [14], Chou Gao, e Zhang [9].

Os métodos sintéticos tentam automatizar os métodos usuais de demonstração em geometria de forma a conseguir demonstrações legíveis por matemáticos.

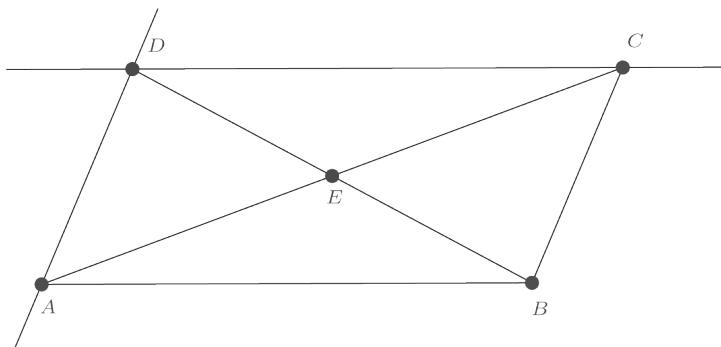
Em 1950 Gelernter criou um demonstrador automático de teoremas que era capaz de achar solução para problemas em geometria plana ao nível dos livros de estudo do ensino secundário. Era baseado na simulação dos métodos humanos tendo sido considerado, na altura, como um caso exemplar na área da inteligência artificial [21].

Vejamos a seguinte conjectura geométrica e como os métodos sintéticos, como o proposto por Gelernter, a tentam demonstrar.

**Teorema 1** *Seja  $ABCD$  um paralelogramo (i.e.  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ ) e  $E$  o ponto de interseção de  $AC$  e  $BD$ . Então tem-se que  $\overline{AE} = \overline{EC}$ .*

A conjectura expressa-se da seguinte forma:

$$\forall_{\text{elementos geométricos}} [(H_1 \wedge \dots \wedge H_r) \Rightarrow G]$$



**Figura 1.** Propriedade das Diagonais de um Paralelogramo

Neste caso concreto, ter-se-ia (ver Figura 1):

pontos  $(A, B, C) \wedge AB \parallel CD \wedge AD \parallel BC \wedge \text{col}(E, A, C) \wedge \text{col}(E, B, D) \Rightarrow AE = EC$ ,

com  $\text{col}(E, B, D)$  a significar que os pontos  $A, B$  e  $C$  são colineares. O facto de que os pontos  $A, B$  e  $C$  são objetos livres, isto é, universalmente quantificados, é representado por pontos  $(A, B, C)$ .

A demonstração é efetuada por encadeamento retrógrado, isto é, partindo da conclusão,  $G$ , procura-se no conjunto de regras de inferência e axiomas uma regra da seguinte forma

$$[(G_1 \wedge \dots \wedge G_r) \Rightarrow G].$$

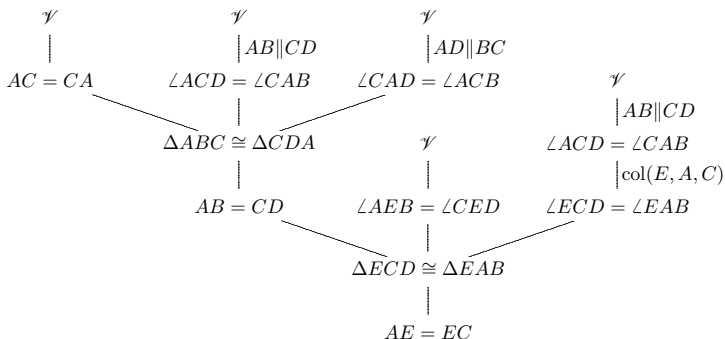
Este processo repete-se para os novos sub-objetivos  $(G_1 \wedge \dots \wedge G_r)$  até que todos os sub-objetivos sejam axiomas ou hipóteses. É usual representar a demonstração através de uma “árvore de demonstração” conjunção-disjunção. Esta “árvore” terá como raiz a conclusão da conjectura, ramificando-se à medida que os novos sub-objetivos são encontrados e, se a conjectura for válida, terá como “folhas” somente axiomas ou as hipóteses da conjectura.

Lendo a árvore de demonstração (ver Figura 2) vê-se que da conclusão que se pretende obter se “sobe” por aplicação da regra  $\triangle ECD \cong \triangle EAB \Rightarrow AE = EC$ , para este sub-objetivo aplicar-se-ia a regra:  $AB = CD \wedge \angle AEB = \angle CED \wedge \angle ECD = \angle EAB \Rightarrow \triangle ECD \cong \triangle EAB$ . Olhando para a árvore de demonstração verifica-se que, neste caso concreto, é possível “fechar” esta árvore tendo como folhas da mesma somente axiomas ou hipóteses da conjectura (ou, como está representado na Figura 2, o valor de verdade  $V$ ).

Para demonstrar a congruência dos triângulos recorre-se ao facto de que  $\angle CAD = \angle ACB$ , o que se deve ao facto de os dois ângulos em questão serem ângulos alternos internos das retas paralelas  $AB$  e  $CD$ , no entanto para tal assumiu-se o facto “trivial” que os pontos  $D$  e  $B$  estão em lados opostos da reta  $AC$ . Este último facto é mais difícil de estabelecer de forma automática do que a afirmação inicial.

Para poder desenvolver as demonstrações sintéticas de forma eficiente vários autores sugerem a utilização das construções geométricas como auxiliares ao processo demonstrativo. Duas utilizações possíveis de um modelo geométrico [14]:

- o diagrama como um filtro (um contra-exemplo);
- o diagrama como um caso exemplar (um exemplo sugerindo uma eventual conclusão).



**Figura 2.** Árvore de demonstração do Teorema 1

A introdução de novos pontos é vista como uma forma de explicitar mais informação proveniente do modelo [14].

Por outro lado, é dito que um demonstrador deve poder combinar um encadeamento retrógrado com um encadeamento direto aquando da execução [14].

Embora tivessem havido muitos desenvolvimentos referentes a estratégias e heurísticas de demonstração, o problema da explosão combinatória no espaço das soluções continua a ser a maior dificuldade a enfrentar por estes tipos de métodos. É de notar que as aproximações da IA não são procedimentos de decisão, isto é, procedimentos capazes de determinar se uma fórmula arbitrária  $P$  é válida (ou não).

A despeito de alguns sucessos parciais e de melhoramentos significativos, os vários esforços nessa direção não conduziram ao desenvolvimento de nenhum demonstrador automático de teoremas, eficiente e capaz de demonstrar um grande número de conjecturas geométricas [1,13, 14, 22, 30, 40].

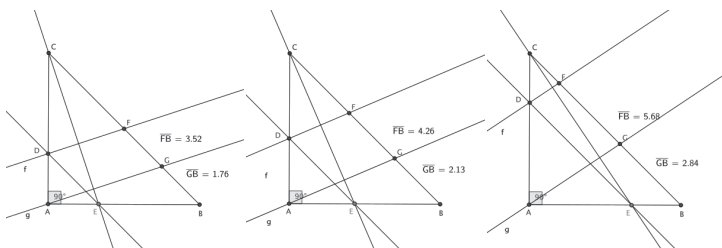
## 2. Sistemas de Geometria Dinâmica

O prémio Turing de 1988 foi atribuído a Ivan Sutherland, pelo seu trabalho pioneiro na área dos grafismos computacionais. O programa *Sketchpad* mudou a forma como as pessoas interagiam com os computadores, de uma forma não gráfica, para uma forma gráfica [51]. O programa *Sketchpad* pode ser considerado como o ponto de origem para os atuais programas de conceção gráfica assistida por computador, CAD, no acrónimo derivado do Inglês *Computer-Aided Drafting*.

Não desmerecendo dos programas de CAD, eles pouco têm de interessante para o praticante de geometria. Falta-lhes umas “gotas de inteligência geométrica” para nos serem úteis. Então o que são e como se distinguem dos CAD, os sistemas de geometria dinâmica?

A palavra “dinâmica” esconde muito mais do que aquilo que aparenta à primeira. Não se trata de um dinamismo no sentido de animação, movimento de objetos geométricos. Trata-se da movimentação de certos elementos de uma dada construção geométrica, preservando as propriedades da mesma.

Os programas de geometria dinâmica (DGS) estão baseados numa teoria construtiva da geometria [54] permitindo a realização de construções geométricas a partir de objetos livres e de construções elementares. A natureza dinâmica de tais programas permite aos seus utilizadores manipular as posições dos objetos livres (objetos quantificados universalmente), preservando as propriedades geométricas da construção. Vejamos o seguinte resultado, referente a uma propriedade dos triângulos isósceles retângulos.



**Figura 3.** Propriedade de um Triângulo Isósceles Retângulo.

**Teorema 2** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo isósceles retângulo com o ângulo reto em A. Seja E um ponto na aresta AB do triângulo. Seja D a interseção da linha que passa por E e é paralela à aresta BC e à linha AC. Sejam f e g duas retas perpendiculares com a linha CE e que passam pelos pontos D e A respectivamente, e sejam F e G as interseções das retas f e g com a hipotenusa BC. Então tem-se que o ponto G é o ponto médio do segmento FB.*

A construção de uma tal figura geométrica (ver Figura 3) é de muito fácil execução num programa como o GeoGebra<sup>1</sup>. Além disso podemos explorar o carácter dinâmico deste DGS para verificar que a manipulação dos objetos livres (pontos A, B e E) não altera a propriedade em estudo.

Temos de ter em atenção que esta manipulação dinâmica da figura, embora muito apelativa, não providencia uma demonstração da conjectura geométrica, trata-se somente de uma validação da mesma num número finito de casos, no modelo Cartesiano. É interessante notar uma outra situação: o GeoGebra possui uma opção de verificação da relação entre dois objetos “(a  $\stackrel{?}{=} b$ )”. Se a aplicarmos às retas f e g ele vai responder-nos que “as retas f e g são paralelas, verificado numericamente”. Mas, como o próprio programa refere, este é um resultado verificado numericamente e não formalmente<sup>2</sup>. Uma recente evolução do GeoGebra introduz a demonstração formal de algumas propriedades geométricas, passa a ser possível pedir a validação formal de uma dada propriedade da construção [2].

Os DGS revelam-se excelentes substitutos para os “velhinhos” instrumentos: régua e compasso. O seu carácter dinâmico permite estabelecer uma primeira ponte entre os modelos e as teorias da Geometria.

Veja-se, por exemplo, o seguinte teorema geométrico (ver Figura 4):

**Teorema 3 (Teorema de Ceva)** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo e P um ponto arbitrário do plano. Seja D a interseção de AP e BC, E a interseção de BP e AC e F a interseção CP e AB. Então temos que:*

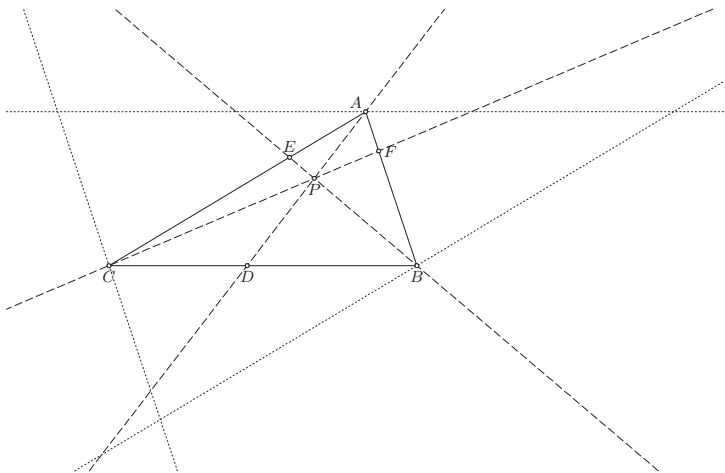
$$\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = 1.$$

1 <http://www.geogebra.org/cms/>

2 Numa utilização anterior chegou a obter-se o resultado “as retas f e g não são paralelas”.



Usemos agora o programa GCLC<sup>3</sup> para fazer a representação gráfica deste resultado. O programa GCLC é um programa de geometria dinâmica que incorpora vários demonstradores automáticos de teoremas para a geometria.



**Figura 4.** Teorema de Ceva.

Podemos, a exemplo do que já fizemos no exemplo anterior, manipular a construção movendo os objetos livres, isto é, aqueles que estão implicitamente quantificados universalmente, neste caso os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $P$ . Se à construção adicionarmos os comprimentos dos segmentos atrás referidos formando a equação pretendida podemos, a menos de imprecisões numéricas, confirmar o resultado.

Mas, usando a sintaxe do GCLC, podemos acrescentar o seguinte à construção

<sup>3</sup> <http://www.emis.de/misc/software/gclc/>

```

prove { equal { mult { mult
                        { sratio A F F B }
                        { sratio B D D C }
                      }
                      { sratio C E E A }
                    }
      1
    }

```

não é mais do que a equação  $\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = 1$  expressa na sintaxe do GCLC e o pedido para que a mesma seja formalmente demonstrada.

Este é um resultado que é facilmente demonstrado por qualquer um dos demonstradores automáticos de teoremas embutidos no GCLC, com tempos de execução abaixo das milésimas de segundo. Além da demonstração do resultado, o programa também nos indica que o resultado é válido, mas não no caso mais geral. É necessário ter em conta os casos degenerados, para este resultado verifica-se que o ponto  $P$  não pode pertencer a nenhuma das retas paralelas aos lados do triângulo e que passam pelo vértice oposto (as linhas a pontilhado na construção da Figura 4).

Como veremos na próxima secção, os GATP podem ser úteis, tanto na verificação da correção de uma dada construção, como na demonstração formal de uma dada conjectura geométrica. Se o método de demonstração usado pelo GATP for geométrico, e não algébrico, a própria demonstração pode ser um objeto de estudo.

### 3. Demonstração Automática de Teoremas Geométricos

Existem duas aproximações possíveis principais quando se trata da automação da demonstração em geometria. Os métodos sintéticos e os métodos algébricos.

Os métodos algébricos têm as suas raízes nos trabalhos de Descartes e na tradução de um problema geométrico num problema algébrico. A automação da demonstração de acordo com esta aproximação começou com o método da eliminação dos quantificadores de Tarski [52] tendo tido muitos melhoramentos desde então [15]. O método do conjunto característico, também designado por método de Wu-Ritt [5, 56], o método de eliminação [55], o método das bases de Gröbner [29]

e a aproximação das álgebras de Clifford [31] são exemplos de métodos algébricos já implementados computacionalmente. Todos estes métodos têm em comum o facto de se basearem em manipulações algébricas, sem relação com os processos habituais de demonstração geométricas. As demonstrações são muito difíceis, se não impossíveis, de seguir dada a complexidade das manipulações sobre polinómios já de si complexos. Na secção 3.1 apresenta-se de forma breve o método de Wu-Ritt.

Uma segunda aproximação à automação da demonstração em geometria é dada pelos métodos sintéticos. Como já vimos na secção 1.1, esta foi uma área muito ativa, utilizando métodos da inteligência artificial, nas décadas de 1950 e 1960. Um tipo de métodos que estão, podemos assim dizer, a meio caminho entre estas duas aproximações são os, assim designados, métodos livres de coordenadas. Neste tipo de métodos as demonstrações combinam inferências geométricas com manipulações algébricas conseguindo demonstrar muitos teoremas complexos da geometria de forma eficiente e, em geral, com demonstrações sucintas e legíveis por um matemático. Na secção 3.2 apresenta-se o método da área, um método representativo deste tipo de aproximação.

### 3.1. Métodos Algébricos

O método de Wu-Ritt e o método das Bases de Gröbner [7] são dois dos métodos algébricos com um maior número de implementações atualmente (veja-se [28, 59], entre outros). O método de Wu-Ritt é um método capaz de demonstrar automaticamente um grande número de construções. O método é completo para proposições geométricas que envolvam somente igualdades em geometria métrica, um sub-conjunto da geometria Euclídiana, no qual as construções geométricas seguem um certo conjunto de passos construtivos [7, 57, 58].

Vejamos este método por meio de um exemplo. Relembrando o teorema 1 (ver Figura 1).

**Teorema 4** *Seja  $ABCD$  um paralelogramo (i.e.  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ ) e  $E$  o ponto de intersecção de  $AC$  e  $BD$ . Então tem-se que  $\overline{AE} = \overline{EC}$ .*

Só três dos objetos da construção são objetos livres (implicitamente quantificados universalmente). Sejam eles  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Para simplificar

podemos situar a reta  $AB$  sobre o eixo das abcissas com  $A$  na origem, isto dar-nos-ia,  $A(0, 0)$ ,  $B(u_1, 0)$ ,  $C(u_2, u_3)$ ,  $D(x_2, x_1)$  e  $E(x_3, x_4)$ , em que a distinção entre variáveis livre e dependentes é-nos dada pela diferente designação,  $u$  e  $x$ . Pretende-se demonstrar que  $g = 2u_2x_4 + 2u_3x_3 - u_3^2 - u_2^2 = 0$ , isto é que  $\overline{AE} = \overline{EC}$ .

Usando as equações das retas  $AD$  e  $CD$  obtém-se as coordenadas do ponto  $D$ . Usando as equações das retas  $BD$  e  $AC$  obtém-se as coordenadas do ponto  $E$ . Podemos então substituir estas soluções no polinómio  $g$  verificando se o mesmo é, ou não, igual a zero.

Para  $x_1$  e  $x_2$  temos as seguintes duas equações:

$$h_1 = u_1x_1 - u_1u_3 = 0 \quad AB \parallel DC$$

$$h_2 = u_3x_2 - (u_2 - u_1)x_1 = 0 \quad DA \parallel CB$$

Para  $x_3$  e  $x_4$  temos também duas equações:

$$h_3 = x_1x_4 - (x_2 - u_1)x_3 - u_1x_1 = 0 \quad E \text{ está em } BD$$

$$h_4 = u_3x_4 - u_2x_3 = 0 \quad E \text{ está em } AC$$

Resolvendo estes sistemas de equações vai obter-se  $x_1 = u_3$ ,  $x_2 = u_2 - u_1$ ,  $x_3 = u_3/2$  e  $x_4 = u_2/2$ . Substituindo estes valores em  $g$  tem-se que  $g = 0$ . Em consequência podemos afirmar que se demonstrou o teorema.

Esta solução não é isenta de problemas dado que não estabelece as condições de não degenerescência, isto é, não estabelece nenhuma condição sobre a qual a propriedade não é válida. Para este caso concreto temos que assumir que  $u_1 \neq 0$  e que  $u_3 \neq 0$ , isto é, que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares.

## O Método de Wu-Ritt

O método de Wu-Ritt é um método de demonstração automática de teoremas geométricos para os quais, na sua forma algébrica, as hipóteses e as conclusões podem ser expressas por equações polinomiais.

Para essas proposições geométricas e após adotar um sistema de coordenadas apropriado, as hipóteses e a conclusão podem ser expressas como um conjunto de equações polinomiais:

$$\begin{aligned} h_1(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_i) &= 0 \\ h_2(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_i) &= 0 \\ &\dots \\ h_n(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_i) &= 0 \\ g(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_i) &= 0 \end{aligned}$$

onde  $h_1, \dots, h_n, g$  são equações polinomiais em  $Q[u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_i]$  ( $Q$  o corpo dos números racionais),  $u_1, \dots, u_d$  são parâmetros ou variáveis independentes e as variáveis  $x_1, \dots, x_i$  são algebricamente dependentes dos  $u$ 's.

Reverendo a demonstração do teorema 1. A formulação inicial do problema é dada por:

$$(h_1 = 0 \wedge h_2 = 0 \wedge h_3 = 0 \wedge h_4 = 0) \Rightarrow g = 0.$$

No entanto, como já vimos acima, esta fórmula não é válida dado que as condições de não degenerescência não foram acrescentadas às hipóteses. Nem sempre é fácil conseguir descortinar qual é o conjunto completo de condições de não degenerescência (ndg), o método de Wu-Ritt vai permitir desenvolver a demonstração de tal forma que no fim obtém-se as condições de não degenerescência.

A demonstração prossegue por triangulação das hipóteses usando pseudo-divisões de polinômios. É necessário que cada sucessivo polinômio nas hipóteses introduza uma variável dependente. Verifica-se que o polinômio  $h_3$  não está nessas condições dado que introduz duas variáveis dependentes,  $x_3$  e  $x_4$ . Por um simples processo de eliminação obtemos o sistema de equações na forma triangular em que  $f_3$  é dado

pelo pseudo-resto (prm) da divisão de  $h_4$  por  $h_3$  em  $x_4$ , denotado por  $f_3 = \text{prm}(h_4, h_3, x_4)$ :

$$f_1 = u_1 x_1 - u_1 u_3 = 0$$

$$f_2 = u_3 x_2 - (u_2 - u_1) x_1 = 0$$

$$f_3 = (u_3 x_2 - u_2 x_1 - u_1 u_3) x_3 + u_1 u_3 x_1 = 0$$

$$f_4 = u_3 x_4 - u_2 x_3 = 0$$

A demonstração desenvolve-se por sucessivas pseudo-divisões:

$$R_3 = \text{prm}(g, f_4, x_4) = 2(u_3^2 + u_2^2)x_3 - u_3^3 - u_2^2 u_3$$

$$R_2 = \text{prm}(R_3, f_3, x_3) = (-u_3^4 - u_2^2 u_3^2)x_2 + ((u_2 - 2u_1)u_3^3 + (u_2^3 - 2u_1 u_2^2)u_3)x_1 + u_1 u_3^4 + u_1 u_2^2 u_3^2$$

$$R_1 = \text{prm}(R_2, f_2, x_2) = (-u_1 u_3^4 - u_1 u_2^2 u_3^2)x_1 + u_1 u_3^5 + u_1 u_2^2 u_3^3$$

$$R_0 = \text{prm}(R_1, f_1, x_1) = 0$$

Dado que  $R_0 = 0$ , temos que o teorema é verdadeiro, sujeito às condições de não degenerescência que advêm da fórmula do resto para as sucessivas pseudo-divisões de  $g$  com respeito a uma fórmula triangular  $f_1, f_2, \dots, f_r$ :

$$I_1^{s_1} \dots I_1^{s_r} g = Q_1 f_1 + \dots + Q_r f_r + R_0$$

na qual os  $I_k$  são os coeficientes iniciais de  $f_k$  em  $x_k$ .

Temos então que, dado que  $R_0 = 0$ , então  $g = 0$  sujeito as condições adicionais  $I_k \neq 0$  ( $k = 1, \dots, r$ ).

Para este exemplo ter-se-ia.

$$I_1 = u_1 \neq 0$$

$$I_2 = u_3 \neq 0$$

$$I_3 = u_3 x_2 - u_2 x_1 - u_1 u_3 \neq 0$$

$$I_4 = u_3 \neq 0$$

ou, geometricamente,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são não colineares e  $AC$  e  $BD$  intersectam-se.

A implementação deste método no sistema *GCLC* permite a demonstração deste resultado em menos de uma milésima de segundo de tempo de execução no processador central (CPU).

Os demonstradores automáticos de teoremas baseados neste método são em geral muito eficientes, provando centenas de teoremas geométricos com tempos de CPU da ordem dos poucos segundos [7,41]. As demonstrações desenvolvem-se através de manipulações algébricas não permitindo o estabelecer de ligações com a geometria que não sejam, no fim da demonstração, a validação, ou não, de uma dada conjectura geométrica.

### 3.2. Métodos Livres de Coordenadas (Semi-Sintéticos)

Os, assim designados, métodos livres de coordenadas são métodos em que as demonstrações combinam inferências geométricas com manipulações algébricas. As suas implementações são capazes de demonstrar muitos teoremas complexos da geometria de forma eficiente. Exemplos de métodos deste tipo são, por exemplo, o método da área, o método do ângulo pleno, o método para a geometria dos sólidos [8, 11, 12].

Nesta secção vamos focar o *método da área*, um método desenvolvido por Chou et al. [9, 10,12] para um fragmento da geometria Euclidiana.

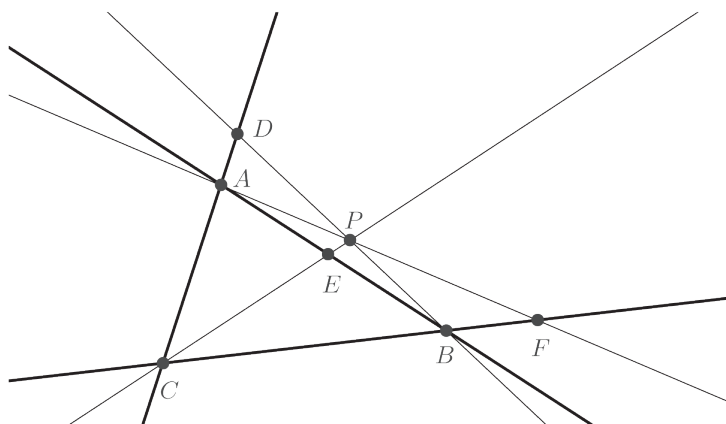
As várias implementações deste método [12, 28, 36, 48] são capazes de provar, de forma eficiente, centenas de teoremas geométricos complexos. Este método é ainda capaz de gerar demonstrações tradicionais, concisas e fáceis de seguir por um matemático. As demonstrações são formadas por passos de inferências geométricas entrecruzadas com manipulações algébricas. Nem sempre as demonstrações são concisas e fáceis de seguir por um matemático, em alguns casos a complexidade das manipulações algébricas sobrepõe-se às restantes manipulações de carácter geométrico.

A ideia principal do método consiste no expressar das hipóteses do teorema através de um conjunto de “pontos livres”, isto é, pontos que são implicitamente quantificados universalmente, e de um conjunto de passos construtivos, sendo que cada um destes passos vai introduzir um novo ponto. No fim a conclusão é expressa como uma igualdade entre dois polinómios em quantidades geométricas próprias do método

da área, sendo que, para expressar estas quantidades geométricas, não será necessário usar coordenadas geométricas. A demonstração é então desenvolvida em sentido contrário, por eliminação dos pontos introduzidos utilizando para tal um conjunto de lemas próprios do método. Após a eliminação de todos os pontos introduzidos, a igualdade que expressa a conjectura a demonstrar colapsa numa igualdade entre duas quantidades racionais envolvendo unicamente os pontos livres. Se as expressões em ambos os lados da igualdade são iguais, a conjectura é um teorema, caso contrário, não é um teorema.

O método da área é um procedimento de decisão para um fragmento da geometria Euclidiana do plano. O método lida com problemas colocados como uma sequência de passos geométricos construtivos.

Vamos introduzir este método utilizando para tal o teorema de Ceva (Teorema 3) como exemplo, reproduzindo aqui de novo a figura, mas numa nova configuração feita utilizando o GeoGebra (ver Figura 5). Não se pretende aqui ser exaustivo, introduzindo somente o necessário para poder seguir a construção, o estabelecer da conjectura e o demonstrar da mesma, para este exemplo concreto. Para todos os detalhes ver o artigo [27].



**Figura 5.** Teorema de Ceva.



**A construção** O fragmento da geometria Euclidiana determinado pelas entidades geométricas e correspondentes propriedades (ver mais à frente) permite expressar as noções de ponto, linha, círculo, assim como as diferentes relações entre estes elementos.

Para poder expressar uma conjectura no fragmento da geometria referido acima, as construções geométricas têm de ser expressas como uma sucessão de construções elementares, as quais introduzem os pontos livres, assim como os pontos obtidos através dos diferentes passos construtivos. Estes passos construtivos elementares vão constituir as hipóteses das conjecturas que pretendemos demonstrar. É de notar que as condições de não degenerescência que alguns destes passos construtivos introduzem foram omitidas (para mais detalhes, ver [27]).

**CE1** construção de um ponto arbitrário (pontos livres);

**CE2** construção de um ponto  $Y$ , interseção de duas retas  $UV$  e  $PQ$ .

condição-ndg:  $UV \nparallel PQ; U \neq V; P \neq Q$ .

graus de liberdade para  $Y$ : 0

No total tem-se cinco construções elementares, sendo que somente quatro é que introduzem novos pontos.

No caso do exemplo que estamos a descrever ter-se-ia: os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $P$  são pontos livres (CE1), pontos quantificados universalmente de forma implícita. O ponto  $D$  é definido como sendo a interseção das retas  $BP$  e  $AC$  (CE2). Os pontos  $E$  e  $F$  são construídos de forma similar (CE2).

Para este problema um conjunto inicial de condições de não degenerescência é dado por  $F \neq B$ ,  $D \neq C$  e  $E \neq A$ . É de notar também que o ponto  $P$  não é um ponto completamente arbitrário do plano. Na verdade as condições de não degenerescência acima referidas são um caso particular das condições que estabelecem que o ponto  $P$  não pode pertencer a nenhuma das retas paralelas aos lados do triângulo e que passam pelo vértice oposto (ver Figura 4).

**Estabelecendo a Conjetura** Como já foi dito acima, um dos problemas chave na automação das demonstrações é o controle da explosão combinatória no espaço das soluções. Este efeito ocorre devido ao número de configurações similares, mas diferentes, que têm de ser analisadas. Por exemplo, dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , quantos triângulos são definidos por estes três pontos? Pode-se argumentar que a resposta é um único triângulo, no entanto, do ponto de vista sintático, e as máquinas de Turing são máquinas de manipulação de símbolos, os triângulos  $ABC$  e  $ACB$  são diferentes. Para reduzir a explosão combinatória, mas também para assegurar um raciocínio rigoroso, é necessário estabelecer relações de ordem, tais como *segmentos de reta orientados*, *dois triângulos com a mesma orientação*, etc. Estas relações não são absolutas, se se fala de um sentido positivo é só em contraposição a um sentido negativo. O efeito pretendido é somente o de estabelecer formas normais que nos permitam dizer que, por exemplo, um dado conjunto de três pontos define um, e um só, triângulo.

Para estabelecer e demonstrar conjecturas geométricas, o método da área define um conjunto de *quantidades geométricas*, as quais permitem tratar as relações de incidência em geometria.

**Definição 1 (Razão entre Segmentos Orientados Paralelos)** Se os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são colineares, a razão entre segmentos orientados paralelos, denotado  $\frac{AB}{CD}$  é a razão entre os comprimentos dos segmentos orientados  $AB$  e  $CD$ . Se os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são não colineares e verifica-se que  $AB \parallel CD$ , existe um paralelogramo  $ABPQ$  tal que  $P$ ,  $Q$ ,  $C$  e  $D$  são colineares e então  $\frac{AB}{CD} = \frac{QP}{CD}$ .

**Definição 2 (Área com Sinal)** Dado o triângulo  $ABC$ , a área com sinal do triângulo, denotada por  $S_{ABC}$  é a área do triângulo  $ABC$ , eventualmente com sinal negativo caso o triângulo  $ABC$  tenha a orientação negativa.

**Definição 3 (Diferença Pitagórica)** A diferença Pitagórica denotada por  $P_{ABC}$  para os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , é definida por  $P_{ABC} = AB^2 + CB^2 - AC^2$ .

A diferença Pitagórica é a generalização de igualdade de Pitágoras para triângulos retângulos, para uma expressão aplicável a um qualquer triângulo. Para um triângulo retângulo tem-se  $P_{ABC} = 0$ .

Um primeiro conjunto de lemas dá-nos as propriedades algébricas que as quantidades geométricas possuem, manipulações que permitem encarar estas quantidades geométricas como “formas normais” representativas das construções geométricas que queremos manipular. Apresentam-se de seguida algumas dessas propriedades [27, 44]:

- $\frac{\overline{PQ}}{AB} = -\frac{\overline{QP}}{AB} = \frac{\overline{QP}}{BA} = -\frac{\overline{PQ}}{BA}$ .
- $\frac{\overline{PQ}}{AB} = 0$  sse  $P=Q$ .
- $S_{ABC} = S_{CAB} = S_{BCA} = -S_{ACB} = -S_{BAC} = -S_{CBA}$ .
- $P_{AAC} = 0$ .
- $P_{ABC} = P_{CBA}$ .

Um segundo conjunto de lemas, os assim designados *lemas de eliminação*, relacionam entre si as quantidades geométricas permitindo a eliminação dos pontos introduzidos aquando da construção.

Para demonstrar a conjectura 3 necessitamos somente do primeiro de um total de treze lemas de eliminação.

**LE1** Seja  $M$  a interseção de duas retas paralelas  $AB$  e  $PQ$  com  $Q \neq P$ . Temos então que

$$\frac{\overline{PM}}{QM} = S_{PAB} / S_{QAB}; \quad \frac{\overline{PM}}{PQ} = S_{PAB} / S_{PAQB}; \quad \frac{\overline{QM}}{PQ} = S_{QAB} / S_{PAQB}.$$

Através das quantidades geométricas, das suas propriedades e lemas, o método da área permite expressar muitas das propriedades usuais em geometria (ver Tabela 1).

No exemplo, a conjectura 3 é expressa usando razões entre segmentos orientados paralelos entre si.

Propriedade Geométrica	em termos das Quantidades Geométricas
os pontos $A$ e $B$ são idênticos	$P_{ABA} = 0$
os pontos $A$ , $B$ e $C$ são colineares	$S_{ABC} = 0$
$AB$ é perpendicular a $CD$	$P_{ABA} \neq 0 \wedge P_{CDC} \neq 0 \wedge P_{ACD} = P_{BCD}$
$AB$ é paralela a $CD$	$P_{ABA} \neq 0 \wedge P_{CDC} \neq 0 \wedge S_{ACD} = S_{BCD}$
$O$ é o ponto médio de $AB$	$S_{ABO} = 0 \wedge P_{ABA} \neq 0 \wedge \frac{AO}{AB} = \frac{1}{2}$
$AB$ tem o mesmo comprimento de $CD$	$P_{ABA} = P_{CDC}$
$A$ , $B$ , $C$ e $D$ são pontos harmônicos	$S_{ABC} = 0 \wedge S_{ABD} = 0 \wedge P_{BCB} \neq 0 \wedge P_{BDB} \neq 0 \wedge \frac{AC}{CB} = \frac{DA}{DB}$
o ângulo $ABC$ tem a mesma amplitude que $DEF$	$P_{ABA} \neq 0 \wedge P_{ACA} \neq 0 \wedge P_{BCB} \neq 0 \wedge P_{DED} \neq 0 \wedge P_{DFD} \neq 0 \wedge P_{EFE} \neq 0 \wedge S_{ABC} \cdot P_{DEF} = S_{DEF} \cdot P_{ABC}$
$A$ e $B$ pertencem ao mesmo arco de círculo $CD$	$S_{ACD} \neq 0 \wedge S_{BCD} \neq 0 \wedge S_{CAD} \cdot P_{CBD} = S_{CBD} \cdot P_{CAD}$

Tabela 1. Propriedades Geométricas – Método da área.

**A demonstração.** A demonstração da conjectura é baseada na eliminação de todos os pontos obtidos por construção, isto é, pretende-se expressar a igualdade a demonstrar em termos dos objetos livres, os quais, lembrando, estão implicitamente quantificados universalmente. Se a igualdade, expressa somente em termos dos pontos livres, é demonstrável, então a conjectura estabelecida inicialmente é um teorema.

Temos então que, para poder provar uma dada conjectura geométrica através do método da área, é necessário:

- Expressar a hipótese do teorema como um conjunto de passos construtivos. Cada passo construtivo introduz um novo ponto.
- A conclusão é expressa em termos de uma igualdade polinomial sobre as quantidades geométricas. A conclusão não contém nenhuma referência a um qualquer sistema de coordenadas.
- A demonstração decorre por eliminação dos pontos anteriormente introduzidos, por ordem inversa, usando para tal os lemas que expressam as propriedades das quantidades geométricas introduzidas.

Adicionalmente é necessário verificar as condições de não degenerescência das construções. Para este exemplo concreto, a demonstração pode decorrer desta forma:

$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \right) \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \right) = 1 \text{ conjectura} \\
 & \left( \left( \left( -1 \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \right) \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \right) \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \right) = 1 \text{ simplificação algébrica} \\
 & \left( -1 \cdot \left( \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \left( \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \right) \right) \right) = 1 \text{ simplificação algébrica} \\
 & \left( -1 \cdot \left( \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} \cdot \left( \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \right) \right) \right) = 1 \text{ o ponto } F \text{ é eliminado (lema LE1)} \\
 & \left( -1 \cdot \left( \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} \cdot \left( \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \left( -1 \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \right) \right) \right) \right) = 1 \text{ simplificação geométrica} \\
 & \frac{\left( S_{APC} \cdot \left( \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \right) \right)}{S_{BPC}} = 1 \text{ simplificação algébrica} \\
 & \frac{\left( S_{APC} \cdot \left( \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{S_{CPB}}{S_{APB}} \right) \right)}{S_{BPC}} = 1 \text{ o ponto } E \text{ é eliminado (lema LE1)} \\
 & \frac{\left( S_{APC} \cdot \left( \left( -1 \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \right) \cdot \frac{S_{CPB}}{S_{APB}} \right) \right)}{(-1 \cdot S_{CPB})} = 1 \text{ simplificação geométrica} \\
 & \frac{\left( S_{APC} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \right)}{S_{APB}} = 1 \text{ simplificação algébrica} \\
 & \frac{\left( S_{APC} \cdot \frac{S_{BPA}}{S_{CPA}} \right)}{S_{APB}} = 1 \text{ o ponto } D \text{ é eliminado (lema LE1)} \\
 & \frac{\left( S_{APC} \cdot \frac{S_{BPA}}{(-1 \cdot S_{BPA})} \right)}{(-1 \cdot S_{BPA})} = 1 \text{ simplificação geométrica} \\
 & 1 = 1 \text{ simplificação algébrica}
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

O demonstrador automático de teoremas GCLC finalizaria com as condições de não degenerescência que são necessárias verificar para que a conjectura possa ser demonstrada, assim como alguns dados sobre como a demonstração decorreu (alguns detalhes foram omitidos).

NDG conditions are:

S BPA = S CPA i.e., lines BC and P A are not parallel  
(construction based assumption) (...)  
P FBF = 0 i.e., points F and B are not identical  
(conjecture based assumption) (...)  
Number of elimination proof steps: 3  
Number of geometric proof steps: 6  
Number of algebraic proof steps: 23  
Total number of proof steps: 32  
Time spent by the prover: 0.000 seconds

Este exemplo serve para ilustrar a forma de expressar um problema usando as quantidades geométricas próprias do método da área e como o demonstrar. Este é também um caso exemplar, mesmo que se mostrassem todos os detalhes da demonstração (alguns passos de manipulações algébricas foram omitidos) esta continuava muito fácil de seguir.

**Implementação do método** O programa GCLC possui uma implementação deste método [26] o qual, de forma eficiente, permite demonstrar centenas de conjecturas geométricas (ver os sistemas GeoThms [43] e TGTP [41]). No entanto nem sempre temos resultados satisfatórios.

Alguns dos pontos menos positivos deste método são:

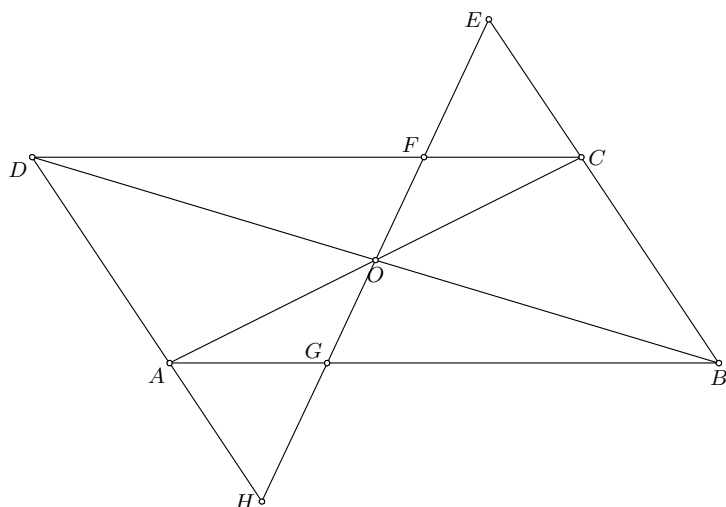
- As quantidades geométricas definidas não são as usuais. É necessário estudar este método particular para poder desenvolver demonstrações através dele.
- Como é evidente dos passos construtivos elementares introduzidos para expressar as conjecturas que podem ser demonstradas por este método, nem todas as construções geométricas usuais podem ser expressas desta forma.
- Nem sempre as demonstrações são curtas e fáceis de seguir. Em alguns casos as manipulações algébricas envolvidas tornam a demonstração difícil de seguir.

Vejamos um outro exemplo (exemplo 84 [6, pg 145]). Neste caso temos uma formulação do problema “normal”, isto é, sem ser necessário usar de forma explícita as quantidades próprias do método da área, e dentro do fragmento da geometria determinado pelo método da área. Pela negativa temos que a demonstração produzida está longe de ser legível.

**Teorema 5** *Uma linha que passe pela ponto O, interseção das diagonais de um paralelogramo ABCD intersecta as retas definidas pelos quatro lados do paralelogramo em E, F, G, H. Mostre que  $\overline{EF} = \overline{GH}$  (ver Figura 6).*

Utilizando a linguagem do sistema GCLC podemos expressar esta conjectura da seguinte forma:

```
% Definição dos Pontos Livres A, B e C
point A 30 30   point B 110 30   point C 90 80
% Construção do Ponto D
line ab A B   line bc B C
parallel cd C ab
parallel ad A bc
intersec D cd ad
% Definição (aleatória) do ponto H (na linha BC)
online H B C
% Construção do Ponto O
line bd B D
line ac A C
intersec O ac bd
% Construção dos Pontos F, G e E
line oh O H
intersec F oh cd
intersec G oh ab
intersec E oh ad
% A conjectura EF = GH
prove { equal { sratio E F G H } { 1 } }
```



**Figura 6.** Exemplo 84 de [6].

É de notar que as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , os pontos livres da construção, são somente necessárias para a visualização da construção, não sendo usadas na demonstração.

O GCLC consegue demonstrar este teorema em 46,559s de tempo de CPU e em 7903 passos, dos quais 6333 são manipulações algébricas, 1127 manipulações geométricas e 443 aplicações dos lemas de eliminação, o documento contendo a prova tem 44 páginas. Estes números já não são compatíveis com uma demonstração que se possa considerar curta e legível.

Como já foi referido dentro desta categoria de métodos temos ainda o *método do ângulo pleno* [8], também para a geometria plana mas permitindo considerar problemas com que o método da área não lida, e o método para a geometria dos *sólidos* [11], que, como o próprio nome indica, aplica-se à geometria dos sólidos Euclidianos.



## 4. Formalização da Geometria

Uma das áreas da ciência da computação muito ativa atualmente, centrando à sua volta o esforço de muitos investigadores, é a área da formalização da matemática (por exemplo, [16, 17, 24, 27, 32, 33, 34, 35, 36], entre outros). De certa forma esta área constitui um completar do círculo. Da máquina de Turing, formalização matemática do conceito de computação, até à utilização dos computadores para ajudar no esforço de formalização das várias áreas da matemática. A geometria não escapa a esse esforço de formalização. Por formalização da geometria entende-se a possibilidade de mecanização das demonstrações, de forma a que as mesmas possam ser executadas de uma forma sintática, desde as hipóteses até à conclusão por uma estrita aplicação das regras de inferência, sem recurso, em nenhuma parte da demonstração, à intuição.

De Euclides a Tarski, passando por Hilbert, a geometria teve um papel central na história da demonstração em matemática. Euclides é considerado como um dos precursores do método axiomático. Nos *Elementos* Euclides [19] estabelece um conjunto de postulados, proposições supostas verdadeiras à evidência e que como tal não passíveis de serem demonstradas. Através unicamente de regras lógicas, ele deduziu todos os resultados que entretanto tinham sido estabelecidos. Os *Elementos* constituíram, num certo sentido, o primeiro sistema formal matemático.

No entanto, estudando com todo o rigor as demonstrações feitas por Euclides, verifica-se que nem sempre as mesmas estão estritamente de acordo com o método axiomático. Em algumas das demonstrações certas etapas, mesmo que parecendo evidentes, não podem ser deduzidas a partir do sistema de axiomas definido. A razão para esta falha deve-se em muitos casos à utilização da intuição, em particular a posição relativa de pontos e retas que são implicitamente admitidas.

Por exemplo, nos *Elementos*, Euclides apresenta uma demonstração do teorema lado-ângulo-lado sobre a igualdade de triângulos [36].

**Teorema 6.** *Se os dois lados de um triângulo  $\triangle ABC$  e o ângulo formado por esses lados são iguais aos lados e ângulo de um outro triângulo  $\triangle DEF$ , então os dois triângulos são iguais.*

A demonstração de Euclides é então: deslocar  $\triangle ABC$  de forma a que o ponto  $A$  coincida com o ponto  $D$  e a reta  $AB$  coincida com a reta  $DE$ . O ponto  $B$  coincidirá com o ponto  $E$  dado que  $\overline{AB} = \overline{DE}$ . De igual modo a reta  $AC$  coincidirá com a reta  $DF$  dado que  $\angle BAC = \angle EDF$ . O ponto  $C$  coincidirá com o ponto  $F$  dado que  $\overline{AC} = \overline{DF}$ . A reta  $BC$  coincidirá com a reta  $EF$  dado que se viu que os quatro pontos que as definem coincidem dois a dois. Finalmente  $\overline{BC} = \overline{EF}$  dados que as extremidades dos segmentos coincidem. Temos então que  $\angle ACB = \angle DFE$  e  $\angle ABC = \angle DEF$ . Q.E.D.

A falha neste raciocínio reside na utilização do termo *deslocar*. Nada nos postulados de Euclides nos diz que podemos utilizar este método de sobreposição.

Em 1899 Hilbert propõe uma nova axiomática com a qual se pretendia um desenvolvimento perfeitamente rigoroso da matemática, no qual a intuição não tivesse nenhum papel a desempenhar no desenvolvimento das demonstrações. Se, para verificar uma demonstração, se pode dispensar de toda a intuição, passa então a ser possível verificar mecanicamente as demonstrações. Estando perante um teorema, por definição decidível, é então possível usar um programa de computador para verificar as demonstrações e fazê-lo de uma forma totalmente formal.

#### 4.1. Formalização do Método da Área

O método da área (ver secção 3.2) foi objeto de formalização no programa *Coq* [53], um sistema genérico de demonstração assistida, que permite expressar asserções matemáticas e verificar mecanicamente as demonstrações dessas asserções.

Utilizando a formalização do método da área [27, 36, 37] todas as propriedades geométricas requeridas pelo método da área foram verificadas formalmente utilizando o programa *Coq*, demonstrando deste modo a correção do sistema e eliminando as eventuais dúvidas sobre a

demonstrabilidade dos lemas do método, e, como consequência direta, também sobre as demonstrações efetuadas utilizando o método.

Vejamos como podíamos lidar com o teorema de Ceva (Teorema 3). O código *Coq* faz a importação do módulo referente ao método da área, especifica a conjectura assim como as condições de não degenerescência e finalmente invoca o método *area\_method* para proceder à demonstração.

```
Require Import area_method.

Theorem Ceva :
  forall A B C D E F G P : Point,
    inter_ll D B C A P -> inter_ll E A C B P -> inter_ll F
    A B C P ->
    F <> B -> D <> C -> E <> A ->
    parallel A F F B -> parallel B D D C -> parallel C E E A ->
    (A ** F / F ** B) * (B ** D / D ** C) * (C ** E / E ** A) = 1.
Proof.
  area_method.
Qed.
```

Como o *Coq* é um sistema interativo de demonstração, e não um sistema para a geometria dinâmica, a componente da construção da figura geométrica está omissa. Por outro lado o método *area\_method* é um, assim designado, *tactical*, isto é uma meta-regra de inferência que automatiza a aplicação de regras de inferência. Neste caso o método em questão automatiza a aplicação do método da área, aplicado ao teorema que se pretende demonstrar.

O resultado da demonstração é o seguinte.

```
Area method:
  initialisation...
  elimination...
  elimination of point : F
  we need to show that:
  (- (S A C P / S B C P * (B ** D / D ** C) * (C ** E / E **
  A)) = 1)
  elimination of point : E
  we need to show that:
  (S A C P / S B C P * (B ** D / D ** C) * (S C B P / S A B P) = 1)
  elimination of point : D
  we need to show that:
```

```
(- (S A C P / S B C P * (S B A P / S C A P) * (S C B P / S A
B P)) = 1)
  uniformize areas...
  simplification...
  before field...
```

Sendo que o *Coq* necessitou de 3,64 segundos de CPU para completar a demonstração.

Os sistemas computacionais interativos de demonstração tais como o *Coq* e o *Isabelle* [39, 53] poderão em breve fazer parte da “caixa-de-ferramentas” dos matemáticos, permitindo-lhe validar as suas intuições, as suas demonstrações, através da verificação mecânica, totalmente formal, das mesmas.

## 5. Ferramentas Inteligentes para a Geometria

Embora a Geometria não tenha sido uma das primeiras áreas a ser tratada pelas primeiras “máquinas de Turing”, ela esteve no entanto presente em duas (r)evoluções importantes: nos primórdios da área da “Inteligência Artificial” e na introdução da componente visual.

Apresento de seguida alguns exemplos<sup>4</sup> de sistemas computacionais que exploram a ligação entre o visual e o dedutivo.

O sistema *geometriagon* (polarprof-001-site1.smarterasp.net/geometriagon/) propõe aos seus utilizadores uma série de problemas geométricos (ver a Figura 7).

---

<sup>4</sup> O portal do projeto *Interoperable Interactive Geometry for Europe* (<http://i2geo.net/>) é um local a explorar para procurar recursos computacionais na área da geometria.



## Γεωμετρώγων

### Ludi geometrici




Utilizador: PEDROQUIJESMA  
 mostra: os meus já resolvidos

**LISTA DOS PROBLEMAS**

pág. 1 de 1  
 asc. << < > >>

linhas/pág. 10

ordem por número

filtros

Atualizar

Núm.	Enunciado do problema	Instrumentos	Ed.	Tipologia	Data	CC	Sol.
1	Dados três pontos A, B e C, desenhar um círculo de centro em C e raio AB	 	2.1	construção de uma circunferência de raio dado	2004-08-31	3312	143
524	Livro I Prop. I: Sobre uma linha recta determinada descrever um triângulo equilátero	 	1.1	de "Elementos" de Euclides	2006-09-24	2558	222
527	Livro I Prop. X: Dividir em duas partes iguais uma linha recta de um comprimento dado	 	1.1	de "Elementos" de Euclides	2006-09-24	2558	99
528	Livro I Prop. XI: De um ponto dado em uma linha recta dada levantar uma perpendicular sobre a mesma recta dada	 	1.2	de "Elementos" de Euclides	2006-09-24	2558	90
529	Livro I Prop. XII: Conduzir uma perpendicular sobre uma linha recta dada indefinida de um ponto dado fora dela	 	1.2	de "Elementos" de Euclides	2006-09-24	2558	104
539	Livro III Prop. XXX: Dividir ao meio um dado arco.	  	1.1	de "Elementos" de Euclides	2006-10-02	2550	102
545	Livro IV Prop. VI: Circunscrever um círculo a um dado triângulo.	  	1.2	de "Elementos" de Euclides	2006-10-18	2534	120
546	Livro IV Prop. VI: Inscrever um quadrado num círculo dado.	  	1.1	de "Elementos" de Euclides	2006-10-18	2534	87
550	Livro IV Prop. IX: Inscrever um círculo num pentágono dado que seja equilátero e equiângulo.	  	1.2	de "Elementos" de Euclides	2006-10-21	2531	111
557	Livro VI Prop. I: Cortar de um segmento dado uma terça parte.	  	1.1	de "Elementos" de Euclides	2006-10-24	2528	71

**Figura 7.** geometriagon, Lista de Problemas.

Cada um dos problemas propostos tem um conjunto de ferramentas geométricas possíveis de serem utilizadas para a sua resolução, sendo que o sistema tem a capacidade de verificar quando é que uma solução para o problema foi atingida (ver Figura 8).

[@angelnet001.vstet](#), [smarterhelp.net/construcao/intermedia.asp?m=455&c=356273](#)

**Centro de Pesquisas em Didática "U. Morin"**  
em memória de Frei Roberto Salla

**Temporário**

ideia e realização: polipeprof  
apoiado em R.a.c. de S. Grottmann

**LISTA DAS SOLUÇÕES**

**PROBLEMA N. 545**

Soluções: 120 Nível: 1.2 Data: 10/18/2005 Dias: 2534

Para aumentar e diminuir a figura, use as teclas + e - ; para a deslizar, use as teclas das setas.

Autor da solução: PEDROQUAREMINA  
Data da solução: 2006-12-26 14:42

língua usada na descrição

breve descrição da sua construção

descrição detalhada da sua construção

XML

<html version="1.0" encoding="utf-8"><?xml><Construction job="true" last="

nível de dificuldade superio

1 2 3 4 5

se quiser, pode alterar os dados precedentes

registar a alteração | eliminar a solução

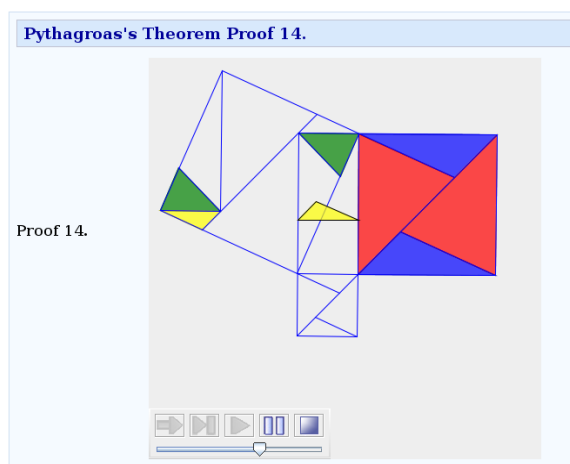
Lista das soluções | Teoria da construção | Reaver as passas da construção

**Figura 8.** *geometriagon*. Bancada de Trabalho.

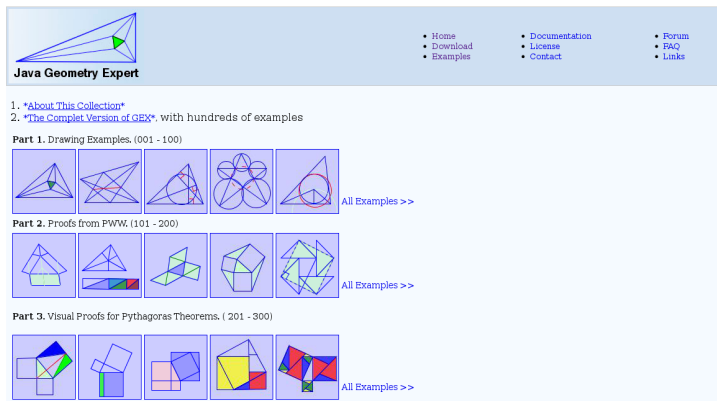
Os problemas são classificados por níveis de dificuldade sendo que é possível explorar algumas das construções já efetuadas por outros utilizadores. Este é um sistema para os entusiastas das construções geométricas com régua e compasso, pois são essas as ferramentas (computacionais) que estão disponíveis.

A um nível mais sofisticado estão os programas que associam os sistemas de geometria dinâmica com os sistemas de cálculo algébrico e os demonstradores automáticos de teoremas (consultar [en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_interactive\\_geometry\\_software](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interactive_geometry_software) para uma lista de sistemas deste tipo) cujas capacidades variam entre a validação das construções que estão a ser efetuadas, à descoberta de propriedades geométricas (por exemplo a equação de um dado lugar geométrico), à demonstração de uma dada conjectura geométrica.

Um sistema muito interessante que faz esta ligação e que além disso tem um acervo muito interessante de demonstrações visuais, por exemplo do Teorema de Pitágoras (ver Figura 9), é o sistema JGEX ([www.cs.wichita.edu/~ye/](http://www.cs.wichita.edu/~ye/)). A lista de exemplos de demonstrações visuais é bastante extensa (ver Figura 10).



**Figura 9.** JGEX, Teorema de Pitágoras.



**Figura 10.** JGEX, Lista de Exemplos.

Este sistema além de ser um sistema de geometria dinâmica incorpora vários demonstradores automáticos de teoremas, os quais podem ser usados para demonstrar conjecturas sobre as construções efetuadas. Além destas componentes o sistema possui a componente das demonstrações visuais dinâmicas a qual permite a utilização das duas outras componentes para criar de forma manual ou (em alguns casos) automática, animações que, usando diferentes efeitos visuais, demonstram visualmente e dinamicamente propriedades geométricas. Por exemplo o sistema possui uma série de demonstrações visuais dinâmicas do Teorema de Pitágoras, na Figura 9 pode-se ver um “instante” da animação (Proof 14), ou acessível através do programa.

Atualmente os sistemas de geometria dinâmica, os demonstradores automáticos de teoremas, a formalização da geometria [16, 17, 37] e a obtenção de conteúdos geométricos de repositórios de informação geométrica [41, 42, 43] constituem recursos computacionais prontos a serem desfrutados pelos seus utilizadores. Recursos que permitem aos seus utilizadores a exploração do conhecimento geométrico.

Não menos importante é a aplicação destas ferramentas geométricas inteligentes em áreas como a educação. Também aqui (r)evoluções importantes estão prestes a acontecer permitindo o desenvolvimento de

ambientes de aprendizagem desafiadores das capacidades dos seus utilizadores [45, 49, 50].

## Referências Bibliográficas

- [1] Philippe Balbiani and Luis del Cerro. Affine geometry of collinearity and conditional term rewriting. In Hubert Comon and Jean-Pierre Jounnaud, editors, *Term Rewriting*, volume 909 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 196–213. Springer Berlin / Heidelberg, 1995. 10.1007/3-540-59340-3 14.
- [2] F. Botana, M. Hohenwarter, P. Janicic, Z. Kovács, I. Petrovic, T. Recio, S. Weitzhofer. Automat-  
ed Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements, JAR, 55(1):39-59, 2015.
- [3] B. Buchberger. An Algorithmic Criterion for the Solvability of a System of Algebraic Equations. In B. Buchberger and F. Winkler, editors, *Gröbner Bases and Applications*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 251, pages 535–545. Cambridge University Press, 1998.
- [4] B. Buchberger. Introduction to Gröbner Bases. In B. Buchberger and F. Winkler, editors, *Gröbner Bases and Applications*, number 251 in London Mathematical Society Lecture Notes Series, pages 3–31. Cambridge University Press, 1998.
- [5] Shang-Ching Chou. *Proving and discovering geometry theorems using Wu's method*. PhD thesis, The University of Texas, Austin, 1985.
- [6] Shang-Ching Chou. *Mechanical Geometry Theorem Proving*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- [7] Shang-Ching Chou. An Introduction to Wu's Method for Mechanical Theorem Proving in Geometry. *Journal of Automated Reasoning*, 4:237–267, 1988.
- [8] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants, II. theorem proving with full-angles. *Journal of Automated Reasoning*, 17:349–370, 1996.
- [9] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated production of traditional proofs for constructive geometry theorems. In Moshe Vardi, editor, *Proceedings of the Eighth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science LICS*, pages 48–56. IEEE Computer Society Press, June 1993.
- [10] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. *Machine Proofs in Geometry*. World Scientific, 1994.
- [11] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated production of traditional proofs in solid geometry. *Journal of Automated Reasoning*, 14:257–291, 1995.
- [12] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants, I. multiple and shortest proof generation. *Journal of Automated Reasoning*, 17:325–347, 1996.



- [13] H. Coelho and L. M. Pereira. GEOM: A Prolog geometry theorem prover. *Memórias 525*, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Ministério de Habitação e Obras Públicas, Portugal, 1979.
- [14] H. Coelho and L. M. Pereira. Automated reasoning in geometry theorem proving with Prolog. *Journal of Automated Reasoning*, 2(4):329–390, 1986.
- [15] George E. Collins. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition: a synopsis. *SIGSAM Bull.*, 10(1):10–12, February 1976.
- [16] Christophe Dehlinger, Jean-François Dufourd, and Pascal Schreck. Higher-order intuitionistic formalization and proofs in Hilbert’s elementary geometry. In Dongming Wang Jürgen Richter-Gebert, editor, *Proceedings of Automated Deduction in Geometry (ADG00)*, volume 2061 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 306–324, 2000.
- [17] Jean Duprat. Basis of the Euclid’s plane geometry. Coq user contribution, 2010. <http://coq.inria.fr/pylons/contribs/view/EuclideanGeometry/v8.3>.
- [18] E. W. Elcock. Representation of knowledge in geometry machine. *Machine Intelligence*, 8:11–29, 1977.
- [19] Euclides. *Elements de Euclides dos seis primeiros livros, do undecimo, e duodecimo*. Imprensa da Universidade de Coimbra, 1855. Tradução da versão latina de Federico Comandino adicionados e ilustrados por Roberto Simson.
- [20] Dov M. Gabbay, C. J. Hogger, and J. A. Robinson, editors. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 1. Oxford Science Publications, Oxford, 1993.
- [21] H. Gelernter. Realization of a geometry theorem proving machine. In *Proceedings of the International Conference Information Processing*, pages 273–282, Paris, June 15-20, 1959.
- [22] Paul C. Gilmore. An examination of the geometry theorem machine. *Artif. Intell.*, 1(3):171–187, 1970.
- [23] J.G. Greeno, M. E. Magone, and S. Chaiklin. Theory of constructions and set in problem solving. *Memory and Cognition*, 7(6):445–461, 1979.
- [24] Frédérique Guilhot. Formalisation en Coq d’un cours de géométrie pour le lycée. In *Journées Francophones des Langages Applicatifs*, Janvier 2004.
- [25] David Hilbert. *Fundamentos da Geometria*. Gradiva, Lisboa, 2003. Edição revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira.
- [26] Predrag Janicic. GCLC – A tool for constructive euclidean geometry and more than that. In Andrés Iglesias and Nobuki Takayama, editors, *Mathematical Software – ICMS 2006*, volume 4151 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 58–73. Springer, 2006.
- [27] Predrag Janicic, Julien Narboux, and Pedro Quaresma. The Area Method: a recapitulation. *Journal of Automated Reasoning*, 48(4): 489 – 532, 2012

- [28] Predrag Janicic and Pedro Quaresma. System description: GCLCprover + GeoThms. In Ulrich Furbach and Natarajan Shankar, editors, *Automated Reasoning*, volume 4130 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 145–150. Springer, 2006.
- [29] Deepak Kapur. Using Gröbner bases to reason about geometry problems. *Journal of Symbolic Computation*, 2(4):399–408, 1986.
- [30] Kenneth R. Koedinger and John R. Anderson. Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science*, 14(4):511–550, 1990.
- [31] H. Li. Clifford algebra approaches to mechanical geometry theorem proving. In X.-S. Gao and D. Wang, editors, *Mathematics Mechanization and Applications*, pages 205–299, San Diego, CA, 2000. Academic Press.
- [32] Nicolas Magaud, Julien Narboux, and Pascal Schreck. Formalizing Desargues’ Theorem in Coq using Ranks. In Sung Y. Shin and Sascha Ossowski, editors, *SAC*, pages 1110–1115. ACM, 2009.
- [33] Nicolas Magaud, Julien Narboux, and Pascal Schreck. Formalizing Projective Plane Geometry in Coq. In Thomas Sturm and Christoph Zengler, editors, *Automated Deduction in Geometry*, volume 6301 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 141–162. Springer, 2011.
- [34] Filip Maric, Ivan Petrovic, Danijela Petrovic, and Predrag Janicic. Formalization and implementation of algebraic methods in geometry. In *First Workshop on CTP Components for Educational Software (THedu’11)*, volume 79 of *EPTCS*, 2012.
- [35] Laura Meikle and Jacques Fleuriot. Formalizing Hilbert’s Grundlagen in Isabelle/Isar. In David A. Basin and Burkhart Wolff, editors, *Theorem Proving in Higher Order Logics*, volume 2758 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 319–334. Springer, 2003.
- [36] Julien Narboux. *Formalisation et Automatisation du Raisonnement Géométrique en Coq*. PhD thesis, Université de Paris Sud, 2006.
- [37] Julien Narboux. Formalization of the area method. Coq user contribution, 2009. [http://dpt-info.u-strasbg.fr/~narboux/area\\_method.html](http://dpt-info.u-strasbg.fr/~narboux/area_method.html).
- [38] Arthur J. Nevins. Plane geometry theorem proving using forward chaining. *Artificial Intelligence*, 6(1):1–23, 1975.
- [39] Lawrence C. Paulson. *The Isabelle Reference Manual*. Computer Laboratory, University of Cambridge, 1998.
- [40] Art Quaife. Automated development of Tarski’s geometry. *Journal of Automated Reasoning*, 5:97–118, 1989. 10.1007/BF00245024.
- [41] Pedro Quaresma. Thousands of Geometric problems for geometric Theorem Provers (TGTP). In Pascal Schreck, Julien Narboux, and Jürgen Richter-Gebert, editors, *Automated Deduction in Geometry*, volume 6877 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 169–181. Springer, 2011.

- [42] Pedro Quaresma and Yannis Haralambous. Geometry Constructions Recognition by the Use of Semantic Graphs. In *Proceedings of RecPad 2012*, Coimbra, 2012.
- [43] Pedro Quaresma and Predrag Janicic. GeoThms – a Web System for euclidean constructive geometry. *Electronic Notes in Theoretical Computer*, 174(2):35-48, 2007.
- [44] Pedro Quaresma and Predrag Janicic. The area method, rigorous proofs of lemmas in Hilbert's style axiom system. Technical Report 2009/006, Centre for Informatics and Systems of the University of Coimbra, 2009.
- [45] Pedro Quaresma, Vanda Santos, and Seifeddine Bouallegue. The Web Geometry Laboratory Project. In *CICM 2013*, volume 7961 of *LNAI*, pages 364-368. Springer, 2013.
- [46] John Alan Robinson and Andrei Voronkov, editors. *Handbook of Automated Reasoning* (Vol 1). Elsevier and MIT Press, 2001.
- [47] John Alan Robinson and Andrei Voronkov, editors. *Handbook of Automated Reasoning* (Vol 2). Elsevier and MIT Press, 2001.
- [48] Judit Robu. *Geometry Theorem Proving in the Frame of the Theorema Project*. PhD thesis, Kepler Universitat, Linz, September 2002.
- [49] Vanda Santos and Pedro Quaresma. *Adaptive Learning Environment for Geometry*, volume *Advances in Learning Processes*, chapter 5, pages 71–92. I-Tech Education and Publishing KG, Vienna, Austria, 2010.
- [50] Vanda Santos and Pedro Quaresma. Integrating DGSs and GATPs in an adaptive and collaborative blended-learning Web-environment. In *First Workshop on CTP Components for Educational Software (THedu'11)*, volume 79 of *EPTCS*, 2012.
- [51] Ivan Edward Sutherland. Sketchpad: A man-machine graphical communication system. Technical Report UCAM-CL-TR-574, University of Cambridge, Computer Laboratory, September 2003.
- [52] Alfred Tarski. A decision method for elementary algebra and geometry. Technical report, RAND Corporation, 1951.
- [53] The Coq Development Team. The Coq Proof Assistant, Reference Manual, Version 8.2. TypiCal Project, Lyon, France, 2009.
- [54] Jan von Plato. The axioms of constructive geometry. In *Annals of Pure and Applied Logic*, volume 76, pages 169-200, 1995.
- [55] D. Wang. Reasoning about geometric problems using an elimination method. In J. Pfalzgraf and D. Wang, editors, *Automated Practical Reasoning*, pages 147-185, New York, 1995. Springer.
- [56] Wen-tsü Wu. *Automated Theorem Proving: After 25 Years*, volume 29, chapter On the decision problem and the mechanization of theorem proving in elementary geometry, pages 213-234. American Mathematical Society, 1984.

[57] Wen-tsü Wu. Basic principles of mechanical theorem proving in elementary geometries. *Journal of Automated Reasoning*, 2:221–252, 1986. 10.1007/BF02328447.

[58] Wen- tsü Wu. The characteristic set method and its application. In X.-S. Gao and D. Wang, editors, *Mathematics Mechanization and Applications*, pages 3{41, San Diego, CA, 2000. Academic Press.

[59] Zheng Ye, Shang-Ching Chou, and Xiao-Shan Gao. An introduction to Java geometry expert. In *Proceedings of the 7th international conference on Automated deduction in geometry*, ADG'08, pages 189-195. Springer, 2011.